



2021 Hong Kong Mathematics Kangaroo Contest — Student —

2021香港數學袋鼠競賽 — 中學高年級 2021香港数学袋鼠竞赛 — 中学高年級

Instruction | 說明 | 说明

1. DO NOT FLIP OPEN THIS FRONT COVER UNTIL YOUR PROCTOR TELLS YOU.
在未收到監考老師指示前，請不要翻開此封面。
在未收到监考老师指示前，请不要翻开此封面。
2. This is a 25 question multiple choice test. For each question, only one answer choice is correct.
這是一套包括25道選擇題的測試，每道題目只有一個正確答案。
这是一套包括25道选择题的测试，每道题目只有一个正确答案。
3. Every question is given a point value. You will receive full points for correct answer, and zero point for blank or incorrect answer. The full score of this test is 100 points.
每道題目都有給定的分值。每題答對得滿分，答錯或空白得0分。本次測試的滿分為100分。
每道题目都有给定的分值。每题答对得满分，答错或空白得0分。本次测试的满分为100分。
4. Only scratch paper, graph paper, rulers, protractors, and erasers are allowed as aids. Calculators are NOT allowed. No problems on the test *require* the use of a calculator.
只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作為輔助工具。計算器是不允許使用的。測試中沒有任何問題必須需要使用計算器。
只能使用草稿紙、方格紙、尺、量角器和橡皮作为辅助工具。计算器是不允许使用的。测试中没有任何问题必须需要使用计算器。
5. Figures are not necessarily drawn to scale.
圖形不一定按比例繪製。
图形不一定按比例绘制。
6. You will have 75 minutes to complete the test once your proctor tells you to begin.
監考老師宣布開始後，你將有75分鐘的時間完成測試。
监考老师宣布开始后，你将有75分钟的时间完成测试。

Part 1: 8 problems, 3 points each

第一部分：8 道題目，每題 3 分 | 第一部分：8 道題目，每題 3 分

1. Let $x = \frac{\pi}{4}$. Which of the following numbers is the largest?

令 $x = \frac{\pi}{4}$ 。問以下各數中哪個最大？

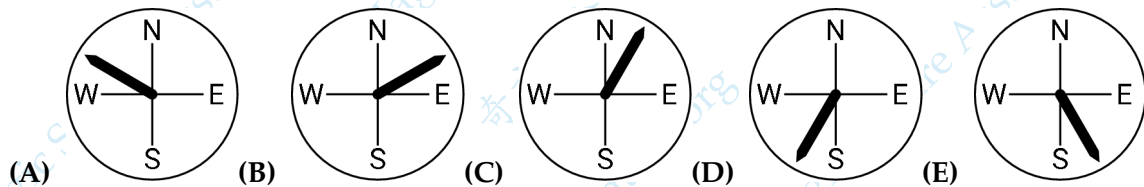
令 $x = \frac{\pi}{4}$ 。問以下各數中哪個最大？

- (A) x^4 (B) x^2 (C) x (D) \sqrt{x} (E) $\sqrt[4]{x}$

2. After the storm last night, the flagpole on our school building is leaning over. Looking from northwest, its tip is to the right of its bottom point. Looking from the east, its tip is also to the right of its bottom point. In which direction could the flagpole be leaning over?

昨晚暴風雨過後，我們學校建築上的旗桿傾斜了。從西北方向看，其尖端位於其最低點的右側。從正東方向看，其尖端也位於其最低點的右側。問旗桿朝哪個方向傾斜？

昨晚暴风雨过后，我们学校建筑上的旗杆倾斜了。从西北方向看，其尖端位于其最低点的右侧。从正东方向看，其尖端也位于其最低点的右侧。问旗杆朝哪个方向倾斜？



3. The sum of the following arithmetic sequence

$$n, n+1, n+2, \dots, n^3$$

is a polynomial in n . What is the degree of this polynomial?

等差數列

$$n, n+1, n+2, \dots, n^3$$

的所有各項之和是一個關於 n 的多項式。問這個多項式的次數是多少？

等差數列

$$n, n+1, n+2, \dots, n^3$$

的所有各項之和是一個關於 n 的多項式。問這個多項式的次數是多少？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

4. How many 3-digit-numbers formed using only the digits 1, 3 and 5 are divisible by 3? You may use digits more than once.

僅用數字 1, 3 和 5 可以構成多少個能夠被 3 整除的三位數? 同一個數字可以多次使用。

仅用数字 1, 3 和 5 可以构成多少个能够被 3 整除的三位数? 同一个数字可以多次使用。

- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 18 (E) 27

5. What is the area of the region, determined by inequalities $y^2 < 4 - x^2$ and $y < -x$?

由不等式 $y^2 < 4 - x^2$ 和 $y < -x$ 決定的區域面積是多少?

由不等式 $y^2 < 4 - x^2$ 和 $y < -x$ 決定的區域面積是多少?

- (A) 4 (B) 2π (C) 4π (D) 8π (E) 16π

6. A rectangular sheet of paper has length x and width y , where $x > y$. The rectangle may be folded to form the curved surface of a circular cylinder in two different ways. What is the ratio of the volume of the longer cylinder to the volume of the shorter cylinder?

一張矩形紙的長度為 x , 寬度為 y , 其中 $x > y$ 。矩形紙可以用兩種不同的方式折疊成彎曲的圓柱的側面。問較長的圓柱體的體積與較短的圓柱體的體積之比是多少?

一张矩形纸的长度为 x , 宽度为 y , 其中 $x > y$ 。矩形纸可以用两种不同的方式折疊成弯曲的圓柱的側面。問較長的圓柱體的體積與較短的圓柱體的體積之比是多少?

- (A) $x : y$ (B) $x^2 : y^2$ (C) 1 : 1 (D) $y : x$ (E) $y^2 : x^2$

7. If $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ and $B = (1, 2) \cup (3, 4)$, what is the set of all numbers of the form $a + b$ with a in A and b in B ?

假設 $A = (0, 1) \cup (2, 3)$, 並且 $B = (1, 2) \cup (3, 4)$, a 在集合 A 中, b 在集合 B 中, 那麼所有 $a + b$ 形式的數構成的集合是什麼?

假设 $A = (0, 1) \cup (2, 3)$, 并且 $B = (1, 2) \cup (3, 4)$, a 在集合 A 中, b 在集合 B 中, 那么所有 $a + b$ 形式的数构成的集合是什么?

- (A) (1, 7) (B) $(1, 5) \cup (5, 7)$ (C) $(1, 3) \cup (3, 7)$
 (D) $(1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7)$ (E) none of the previous | 以上都不對 | 以上都不对

8. What proportion of all the divisors of $7!$ is odd?

在 $7!$ 的所有約數中，奇數所佔的比例是多少？

在 $7!$ 的所有約數中，奇數所占的比例是多少？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

Part 2: 9 problems, 4 points each

第二部分：9 道題目，每題 4 分 | 第二部分：9 道題目，每題 4 分

9. What is the area of the triangle whose vertices are at (p, q) , $(3p, q)$ and $(2p, 3q)$, where $p, q > 0$?

頂點分別為 (p, q) , $(3p, q)$ 和 $(2p, 3q)$ 的三角形的面積是多少？其中 $p, q > 0$ 。

頂點分別為 (p, q) , $(3p, q)$ 和 $(2p, 3q)$ 的三角形的面積是多少？其中 $p, q > 0$ 。

- (A) $\frac{pq}{2}$ (B) pq (C) $2pq$ (D) $3pq$ (E) $4pq$

10. The first 1000 positive integers are written in a row in some order and all sums of any three adjacent numbers are calculated. What is the greatest number of odd sums that can be obtained?

前 1000 個正整數按一定順序排成一行，併計算任意三個相鄰的數之和。問這些和數中最多有多少個奇數？

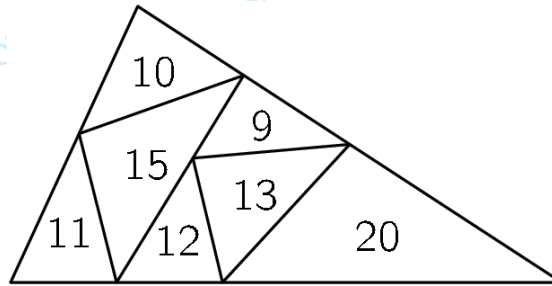
前 1000 個正整數按一定順序排成一行，并計算任意三個相鄰的數之和。問這些和數中最多有多少個奇數？

- (A) 499 (B) 500 (C) 995 (D) 996 (E) 997

11. A large triangle is divided into smaller triangles as shown. The number inside each small triangle indicates its perimeter. What is the perimeter of the large triangle?

如圖所示，大的三角形被劃分成了較小的三角形。每個小三角形內的數表示其周長。問大三角形的周長是多少？

如图所示，大的三角形被划分成了较小的三角形。每个小三角形内的数表示其周长。问大三角形的周长是多少？

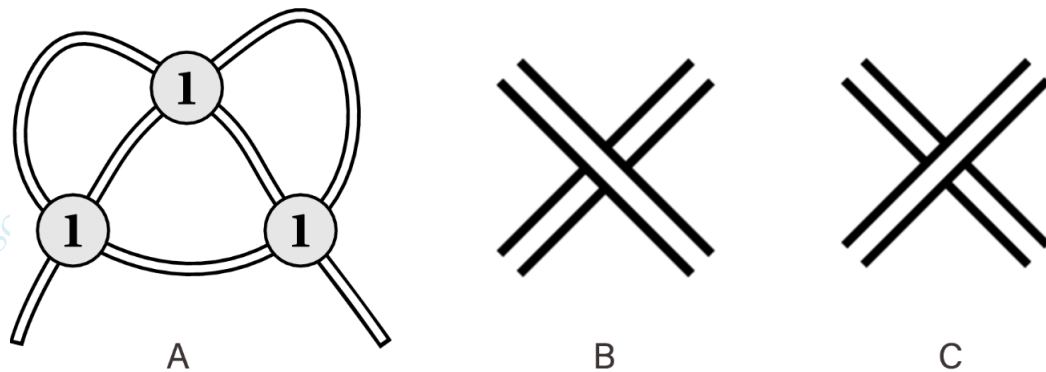


- (A) 31 (B) 34 (C) 41
(D) 62 (E) none of the previous | 以上都不對 | 以上都不对

12. A piece of string is lying on the table. It is partially covered by three coins as seen in the figure A. Under each coin the string is equally likely to pass over itself like figure B, or like figure C. What is the probability that the string is knotted after its ends are pulled?

桌上放著一根繩子。如圖 A 所示，它的一部分被三個硬幣覆蓋。在每個硬幣下，繩子像圖 B 或圖 C 一樣交叉的可能性相同。問拉動繩子的末端後繩子打結的概率是多少？

桌上放著一根繩子。如图 A 所示，它的一部分被三个硬币覆盖。在每个硬币下，绳子像图 B 或图 C 一样交叉的可能性相同。问拉动绳子的末端后绳子打结的概率是多少？

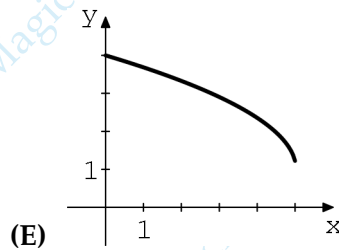
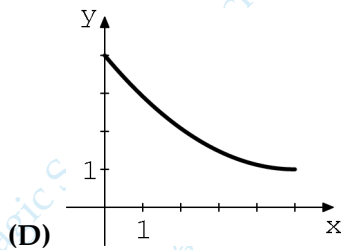
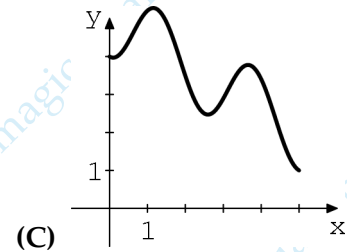
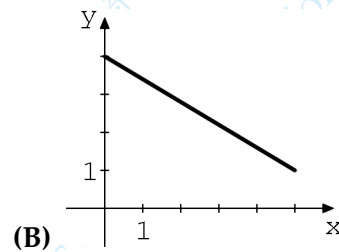
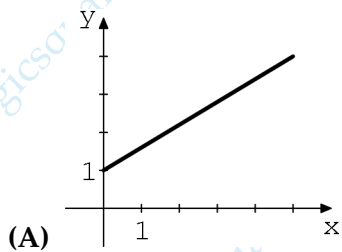
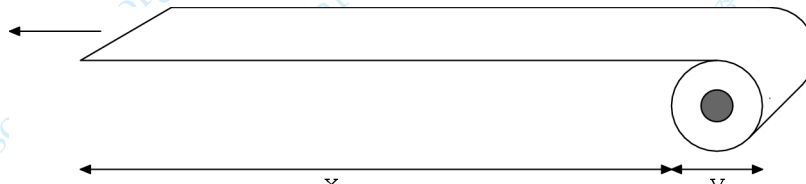


- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$ (E) $\frac{3}{4}$

13. A naughty pup grabs the end of a roll of toilet paper and walks away at a constant speed. Which of the functions below best describes the thickness y of the roll as a function of the unrolled part x ?

一隻頑皮的小狗抓住一卷廁紙的末端，然後以恆定的速度往遠處走。把捲紙的厚度 y 看作展開部分 x 的函數，以下哪個圖像最好的描述了這個函數關係？

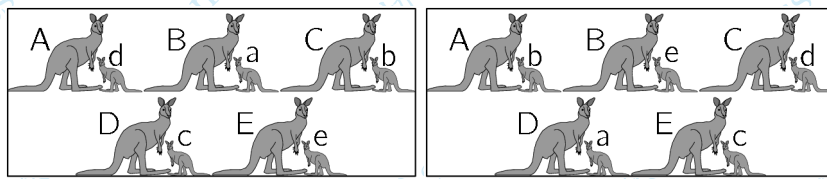
一只顽皮的小狗抓住一卷厕纸的末端，然后以恒定的速度往远处走。把卷纸的厚度 y 看作展开部分 x 的函数，以下哪个图像最好的描述了这个函数关系？



14. Five kangaroos named A, B, C, D and E have one child each, named a, b, c, d and e. In the first group photo shown exactly two of the children are standing next to their mothers. In the second group photo exactly three of the children are standing next to their mothers. Whose child is a?

五個名為 A, B, C, D 和 E 的袋鼠各有一個孩子，分別為 a, b, c, d 和 e。在第一張合影中有兩個孩子站在自己的母親旁邊。在第二張合影中有三個孩子站在自己的母親旁邊。問 a 是誰的孩子？

五个名为 A, B, C, D 和 E 的袋鼠各有一个孩子，分别为 a, b, c, d 和 e。在第一张合影中有两个孩子站在自己的母亲旁边。在第二张合影中有三个孩子站在自己的母亲旁边。问 a 是谁的孩子？



- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

15. In the 5×5 square shown the sum of the numbers in each row and in each column is the same. There is a number in every cell, but some of the numbers are not shown. What is the number in the cell marked with a question mark?

在 5×5 的方格表中，每一行和每一列中的各數總和是相同的。每個單元格中都有一個數，但有些數未顯示。問標有問號的單元格中的數是什麼？

在 5×5 的方格表中，每一行和每一列中的各數總和是相同的。每個單元格中都有了一個數，但有些數未顯示。問標有問號的單元格中的數是什麼？

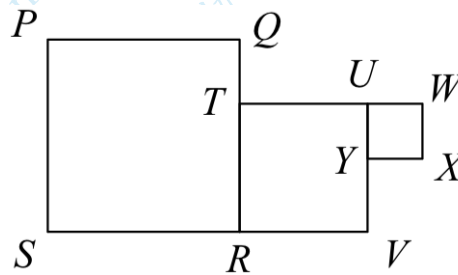
	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 23

16. The diagram (not necessarily drawn to scale) shows three squares, $PQRS$, $TRVU$ and $UWXY$. They are placed together, edge to edge. Points P , T and X lie on the same straight line. The area of $PQRS$ is 36, and the area of $TRVU$ is 16. What is the area of triangle PXV ?

圖示（未必按比例繪製）為三個正方形 $PQRS$ ， $TRVU$ 和 $UWXY$ 。它們被並排放置在一起，邊與邊相接。已知點 P ， T 和 X 位於同一直線上。正方形 $PQRS$ 的面積為 36，正方形 $TRVU$ 的面積為 16。問三角形 PXV 的面積是多少？

圖示（未必按比例繪製）為三個正方形 $PQRS$ ， $TRVU$ 和 $UWXY$ 。它們被並排放置在一起，邊與邊相接。已知點 P ， T 和 X 位於同一直線上。正方形 $PQRS$ 的面積為 36，正方形 $TRVU$ 的面積為 16。問三角形 PXV 的面積是多少？

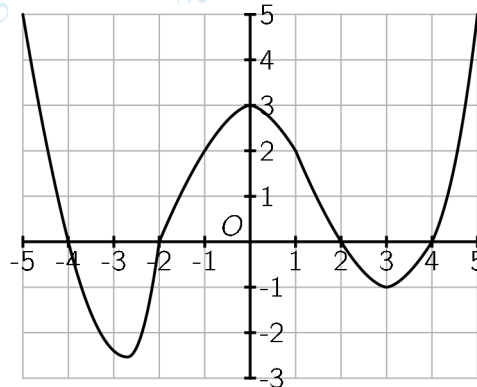


- (A) $14\frac{2}{3}$ (B) $15\frac{1}{3}$ (C) 16 (D) $17\frac{2}{3}$ (E) 18

17. The figure shows the graph of a function $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. How many distinct solutions does the equation $f(f(x)) = 0$ have?

下圖顯示了函數 $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ 的圖像。問方程 $f(f(x)) = 0$ 有多少個不同的解？

下图显示了函数 $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像。问方程 $f(f(x)) = 0$ 有多少个不同的解？



- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Part 3: 8 problems, 5 points each

第三部分：8 道題目，每題 5 分 | 第三部分：8 道題目，每題 5 分

18. We know that $\log 2 \approx 0.30103$ and $\log 3 \approx 0.47712$. How many digits are in the decimal representation of 12^{1000} ?

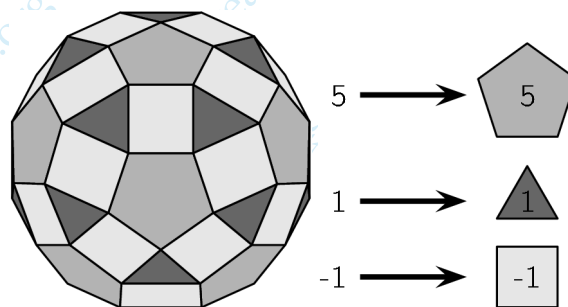
我們知道 $\log 2 \approx 0.30103$ 和 $\log 3 \approx 0.47712$ 。問 12^{1000} 的十進製表示中有多少位數？

我们知道 $\log 2 \approx 0.30103$ 和 $\log 3 \approx 0.47712$ 。问 12^{1000} 的十进制表示中有多少位数？

- (A) 1079 (B) 1080 (C) 1199 (D) 1200 (E) 1201
19. The solid shown in the diagram has 12 regular pentagonal faces, the other faces being either equilateral triangles or squares. Each pentagonal face is surrounded by 5 square faces and each triangular face is surrounded by 3 square faces. John writes 1 on each triangular face, 5 on each pentagonal face and -1 on each square. What is the total of the numbers written on the solid?

圖中的形體有 12 個正五邊形的面，其他的面為等邊三角形或正方形。每個五邊形的面都與 5 個正方形的面相連，而每個三角形的面都與 3 個正方形的面相連。John 在每個三角形的面寫上 1，每個五邊形的面寫上 5，每個正方形的面寫上 -1 。問形體上所寫數的總和是多少？

图中的形体有 12 个正五边形的面，其他的面为等边三角形或正方形。每个五边形的面都与 5 个正方形的面相连，而每个三角形的面都与 3 个正方形的面相连。John 在每个三角形的面写上 1，每个五边形的面写上 5，每个正方形的面写上 -1 。问形体上所写数的总和是多少？

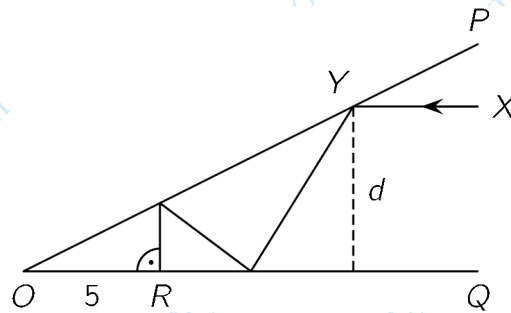


- (A) 50 (B) 60 (C) 80 (D) 90 (E) 120

23. Two plane mirrors OP and OQ are inclined at an acute angle (diagram is not to scale). A ray of light XY parallel to OQ strikes mirror OP at Y . The ray is reflected and hits mirror OQ , is reflected again and hits mirror OP and is reflected for a third time and strikes mirror OQ at right angles at R , as shown. The distance OR is 5 cm. The ray XY is d cm from the mirror OQ . What is the value of d ?

兩個平面鏡 OP 和 OQ 相交呈銳角（圖形未按比例繪製）。如圖所示，與平面鏡 OQ 平行的一束光線 XY 照射到平面鏡 OP 的 Y 點。反射的光線照射在平面鏡 OQ 上，再次反射照射在平面鏡 OP 上，第三次反射後光線垂直照射在平面鏡 OQ 的 R 點。 OR 的距離為 5 cm。光線 XY 距離平面鏡 OQ 的距離為 d cm。問 d 的值是多少？

两个平面镜 OP 和 OQ 相交呈锐角（图形未按比例绘制）。如图所示，与平面镜 OQ 平行的一束光线 XY 照射到平面镜 OP 的 Y 点。反射的光线照射在平面镜 OQ 上，再次反射照射在平面镜 OP 上，第三次反射后光线垂直照射在平面镜 OQ 的 R 点。 OR 的距离为 5 cm。光线 XY 距离平面镜 OQ 的距离为 d cm。问 d 的值是多少？



- (A) 4 (B) 4.5 (C) 5 (D) 5.5 (E) 6

24. Alice is solving quadratic equations and notices that those involving the terms x^2 , $5x$ and 6 always have integer solutions no matter how she assigns $+$ and $-$ signs to the coefficients. For example, $x^2 + 5x + 6 = 0$ has solutions $x = -2$ and -3 , while $-x^2 - 5x + 6 = 0$ has solutions $x = 1$ and -6 . Alice wants to find other examples of quadratic equations of the form $x^2 + bx + c = 0$ which have this property. Which of the following numbers is not equal to the constant term c in such an equation?

Alice 正在求解二次方程，她注意到對於涉及項 x^2 , $5x$ 和 6 的方程，無論怎樣為係數分配 $+$ 或 $-$ 的符號，它總具有整數解。例如， $x^2 + 5x + 6 = 0$ 有整數解 $x = -2$ 和 -3 ，而 $-x^2 - 5x + 6 = 0$ 有整數解 $x = 1$ 和 -6 。Alice 想找到具有這樣性質的形式為 $x^2 + bx + c = 0$ 的二次方程的其他示例。在這樣的方程中，下列哪個數不可能是其中的常數項 c ?

Alice 正在求解二次方程，她注意到對於涉及項 x^2 , $5x$ 和 6 的方程，無論怎樣為係數分配 $+$ 或 $-$ 的符號，它總具有整數解。例如， $x^2 + 5x + 6 = 0$ 有整數解 $x = -2$ 和 -3 ，而 $-x^2 - 5x + 6 = 0$ 有整數解 $x = 1$ 和 -6 。Alice 想找到具有這樣性質的形式為 $x^2 + bx + c = 0$ 的二次方程的其他示例。在這樣的方程中，下列哪個數不可能是其中的常數項 c ?

- (A) 24 (B) 30 (C) 48 (D) 54 (E) 60

25. A certain game is won when one player gets 3 points ahead. Two players A and B are playing the game and at a particular point, A is 1 point ahead. Each player has an equal probability of winning each point. What is the probability that A wins the game?

在一個遊戲中，當某個玩家領先 3 分時，則贏得遊戲。兩名玩家 A 和 B 在玩遊戲，在某個特定時點，A 領先 1 分。對每一分而言，每個玩家獲得的機率是相等的。問 A 贏得遊戲的機率是多少？

在一个游戏中，当某个玩家领先 3 分时，则赢得游戏。两名玩家 A 和 B 在玩游戏，在某个特定时点，A 领先 1 分。对每一分而言，每个玩家获得的机率是相等的。问 A 赢得游戏的机率是多少？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$